時間結晶 (time crystal) は存在するか

東京大学大学院工学系研究科 物理工学専攻 渡辺 悠樹物性研究所 量子物質研究グループ 押川 正毅

1. はじめに

私たちの身の回りは対称性の自発的破れで満ち満ちていま す。例えば結晶は空間の並進対称性を自発的に破っている と言われます。もともと結晶がなければ、空間自体は完全 に滑らかで、どの点に注目しても全く等価です。そのため 結晶を構成する原子の一つ一つの運動法則は空間の位置に よりません。これが空間の連続的並進対称性です。ところ がひとたび結晶ができると、結晶内部の原子は周期的な配 列をなし、空間の「原子がある点」と「ない点」が明確に 区別されます。したがって空間の各点の等価性が壊れてお り、並進対称性が破れたことになります。結晶ができた後 も、結晶の単位胞は全て等価なので、結晶は基本並進ベク トルの整数倍の重ね合わせによる並進操作のもとで不変で す。すなわち、結晶においても、離散的並進対称性は保た れることになります。結晶の持つこの特徴に着目して抽象 化・一般化すれば、結晶とは元々の「連続的空間並進対称 性」を「離散的空間並進対称性」へと自発的に破るもので ある、と特徴づけることができます。

この空間並進対称性の他にも、物理には様々な対称性が登場し、その自発的破れが議論されます。それでは、果たして全ての対称性が自発的に破れ得るのでしょうか。

フランク・ウィルチェック教授(Frank Wilczek、マサチューセッツ工科大学教授、2004 年ノーベル物理学賞受賞)は、2012 年に、空間ではなく時間の並進対称性を破る「時間結晶」の可能性を理論的に提案しました[1]。空間の並進対称性と同様に、時間も一様に流れており、特にどの時刻が特別ということはありません。この「連続的時間並進対称性」を「離散的時間並進対称性」へと自発的に破る非自明な基底状態もしくは平衡状態が存在するのではないか、という提案です。我々の知覚としては空間と時間は全くの別物ですが、数学的には空間も時間も座標の一成分に過ぎず、3次元空間と時間を合わせて「4次元時空」という捉え方をすることができます。さらに特殊相対性理論によると時間と空間の間にはある種の対称性(ローレン

ツ対称性)があるため、空間方向に可能なことは時間方向 にも可能であるように思えます。

ノーベル賞物理学者による新しい物質相の理論提案という話題性から、ウィルチェックのこの研究は多くのポピュラーサイエンスの記事で取り上げられました。また時間結晶に関するさらなる研究のきっかけとなり、ウィルチェックの論文はすでに100回以上も引用されています。実際に時間結晶を実現するための実験をデザインする論文も書かれましたが[2]、その一方で最初の論文中で議論された模型の誤りを指摘する論文も書かれるなど、時間結晶の実現可能性は物議を醸しました[3]。研究者の間で合意が得られず混乱が続いていた一因は、以下で議論するように、時間結晶を理論的に明確に定義することは意外に難しいということにあります。

2. 「自発的」時間並進対称性の破れ

仮に「時間結晶」が本当に存在したとして、それはどのようなものでしょうか。通常の結晶の場合には、空間のある軸に沿って見たとき、原子の密度が振動します。これから類推すれば、時間結晶では、空間軸ではなく時間軸に沿ってみたときに何らかの物理量が振動することになります(図 1)。しかし、ただ時間的に振動すれば良いのであれば、単純なバネ振り子なども含むあらゆる振動現象が時間結晶ということになってしまいます。ここで重要になるのが「自発的」というキーワードです。例えばバネ振り子の場合であれば、バネを自然長からさらに伸ばした状態で手を離せばもちろん振動を開始しますが、これでは「自発的」に振動し時間並進対称性を破ったことにはならないわけです。しかしこの「自発的」という概念を数学的に定式化することは実は簡単ではありません。

物理量の期待値<O(t)>

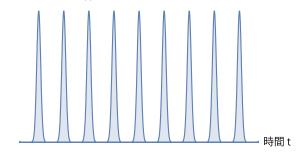


図 1:仮に時間結晶が実現した場合に期待される振る舞い。物理 量の期待値が時間的に振動する。

ウィルチェックが最初に提案した例は、超伝導体でリングを作り、その穴に磁束を通すというものでした[1]。超伝導リングに磁束を通すと、その磁束を打ち消すように基底状態・平衡状態においても超伝導電流が流れます。しかしこのままではリングの各点における電流は時間的に一定なので、時間並進対称性を破ったことになりません。ウィルチェックのアイディアは、空間的に不均一な超伝導体を使うことにありました。超伝導ギャップが空間的に変化するFulde-Ferrell-Larkin-Ovchinikov (FFLO)状態のような超伝導体を用い、それでリングを作り磁束を導入すれば、その不均一性も超伝導電流とともにぐるぐる回ると主張したのです[図 2(a)]。その結果、リングの各点における電流密度は時間的に振動することになるはずです。

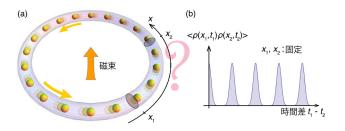


図 2:ウィルチェックが考案した時間結晶の例。(a)超伝導リングに磁束を通すと平衡状態でも超伝導電流が流れる。空間的に不均一な超伝導体を用いたとき、不均一性も超電流と一緒にクルクル回ると仮定すると、空間の各点における超電流は時間的に振動し、時間並進対称性を破る。(b)その結果、超電流の相関関数も時間差の関数として振動すると期待される。

この例は一見もっともらしく聞こえるのですが、基底状態・平衡状態において物理量が振動するという常識に反することが起こっています。そもそも量子力学によれば、ハミルトニアンの固有状態は定義により位相因子を除いて時間によらず、物理量の期待値も当然振動しません。従って基底状態はもとより、固有状態での期待値をボルツマン分布に従って足しあわせた平衡状態では振動が起き得ないの

です。ウィルチェックは、多粒子系に特有の特異性によってこの困難が回避されているのだと主張しましたが、果たして本当にそのようなことが起こり得るのでしょうか。

通常の結晶の場合は、外から手で空間の並進対称性を破ら なくても、系が平衡状態に達するまで待っていれば「自発 的」に結晶が生じ、並進対称性を破るだろうとナイーブに は期待されます。しかし現実には完全に対称性があるとい うことはなく、元々わずかに空間の不均一があり、そこが 種になって結晶が成長します。これに対応して、理論的に 自発的対称性の破れを議論する際にも、わずかに対称性を 破る場を外からかけておいてその外場の下で平衡状態をつ くり、体積を無限大の極限を取った後に外場を切るという トリックがよく用いられます。このようにしないと、例え ば絶対零度を記述する基底状態は、結晶の位置に関する重 ね合わせ状態(非物理的な「シュレーディンガーの猫」状 態)になり、平均密度としては原子が特定の位置に周期的 に並ぶことになりません。有限温度の平衡状態を記述する ボルツマン分布においても、結晶の位置についてのあらゆ る状態を足しこんでしまえば、同様に原子密度の周期的な 構造は互いに打ち消し合ってしまいます。つまり「自発的」 対称性の破れとはいうものの、それをきちんと定式化する には、まず外から対称性を破る場を予めかけた上で平衡状 態を用意しておいて、その外場を切った後も対称性の破れ が残るかどうかを議論するのです。

すると、時間結晶についても、通常の結晶についてのこのような標準的な定式化を適用すれば良さそうです。しかし、これはすぐに根本的な問題に直面します。時間結晶の定式化に必要な外場は、時間並進対称性を破る、すなわち時間に依存することになります。そのような外場のもとでは、「基底状態」や「平衡状態」といった概念は意味をなさなくなってしまいます。この点において「時間並進対称性の自発的破れ」は、やはり他の対称性の破れとは一線を画しており、その定義から見直す必要が生じるのです。我々の研究が出るまでは、この「時間並進対称性の自発的破れ」の定義がきちんとなされないままになっていたため、果たして時間結晶は可能か不可能かという議論に決着がつかないままになっていました。

3. 長距離秩序に基づく定式化

この状況を踏まえ、私たちは、まず「長距離秩序」という観点から「自発的時間並進対称性の破れ」を数学的にきち

んと定式化することから始めました。この長距離秩序を調べることの利点は、対称性を破る外場をかけずに自発的対 称性の破れを議論できる点にあります。

例を用いて説明するために、よく知られているイジング模型を考えましょう。この模型には各サイトiのスピン S_i^z を一斉にひっくり返す対称性がありますが、スピンが特定の向きに揃う強磁性相ではこの対称性が自発的に破れます。

対称性を破る外場を用いるアプローチでは、例えば+z 方向に磁場をかけておき、スピンが+z 方向へ揃った状態が安定となるようにしておきます。このときの平衡状態を用いて S_i^z を計算すると、正の有限の値が得られます。このまま、まず体積を無限大にした後にz 軸方向への磁場を切る極限をとると S_i^z の期待値は有限の値 m に収束し、自発的に対称性が破れたことになります。実際、転移温度(キュリー温度)以下のイジング模型ではこのようなことが起こり、強磁性相が実現することが知られています。

一方、対称性を破る外場をかけない場合には S_i^z の期待は ゼロになります。どんなに低温でも、有限系の平衡状態に はスピンが+z の方を向いた状態と、この状態のスピンを 反転した状態が同じ確率で寄与するので、 S_i^z の期待値は 打ち消し合ってしまうのです。ところが2つの異なるサイ トにおけるスピンの積 $S_i^z S_i^z$ の期待値(相関関数)は、ス ピンが+z 方向に揃った状態でも-z 方向に揃った状態でも 正の値を持つので、平均を取っても打ち消し合いません。 特に自発的対称性の破れが起こると、系に長距離秩序が生 じ、 $S_i^z S_j^z$ の期待値がサイト i とサイト j を十分遠くに引 き離した極限で一定値 σ²> 0 に近づきます。簡単のために ここでは古典的なイジング模型を例に説明しましたが、熱 揺らぎのかわりに量子揺らぎが重要となる量子力学系でも 同様の議論が成立します。先行研究から「対称性を破る外 場をかけずに計算した長距離秩序 σ 」と「対称性を破る外 場を用いて計算した秩序パラメータ m」の間には密接な 関係があることが知られており、多くの物理系で片方がゼ 口でなければもう片方もゼロでないことが確認できます。 実際 Koma-Tasaki の論文[4]によると、かなり一般的に $m \ge C\sigma$ (ただしCは1のオーダーの定数) という関係が 数学的に厳密に成り立ちます。

時間並進対称性に対しては、先に議論したようにそもそも 外場をかけて秩序パラメータ m を定義することができな いので、我々はマクロな物理量の時間方向における長距離 秩序 σ [図 2(b)]を用いて時間並進対称性の自発的破れを 「定義」することにしました。そして、Horsch-von der Linden[5]によって導入された二重交換子を使う数学的トリックを用いて、このように定義された時間結晶が存在しないことを証明することに成功しました[6]。その議論は、「ハミルトニアンの局所性」と「離散的空間並進対称性」しか用いておらず、非常に一般的なものとなっています。

最初に述べたように、時間結晶を考える一つの動機は、空間並進対称性を自発的に破る結晶が存在するならば、時間並進対称性が自発的に破れてもよいのではないかということでした。我々の結果は(基底状態・平衡状態において)これを否定するもので、一見すると相対性理論(ローレンツ不変性)と矛盾するようにも見えます。しかし、そもそも量子統計力学では、基底状態・平衡状態はハミルトニアンを用いて定式化されているため、ハミルトニアン自身によって生成される時間並進対称性は特別で、基底状態・平衡状態で自発的に破れることがない、というのはある意味で自然な結論と言えます。

4. 最後に

我々の研究では基底状態・平衡状態において「連続的時間 並進対称性」を「離散的時間並進対称性」へと自発的に破 る時間結晶の非存在性を議論しましたが、これで時間結晶 (時間並進対称性の自発的破れ)というアイディアが完全 に否定されてしまったわけではありません。基底状態・平 衡状態という条件を外せば、我々の結果は適用できず、時 間結晶の可能性が残されます。ただし、基底状態・平衡状 態以外で「自発的に」時間並進対称性が破れる、というこ とを意味のある形で定義する必要があります。たとえば、 周期 Tの時間依存外場によって駆動されている系が、周期 2T の発振を示せば、それは系の離散的時間並進対称性を 半分に破っていると考えることができます。これは格子の 周期を2倍に破る電荷密度波の時間版です。このような離 散から離散への時間並進対称性の破れは多体局在(manybody localization)を示す系において安定に実現可能であ ることが最近の研究によってわかってきました[7]。今後、 さらなる研究を経て量子状態の時間依存性や非平衡状態、 多体局在に関する理解が深まることが期待されます。

参考文献

- F. Wilczek, Quantum Time Crystals, Phys. Rev. Lett. 109, 160401 (2012).
- [2] T. Li, Z.-X. Gong, Z.-Q. Yin, H. T. Quan, X. Yin, P. Zhang, L.-M. Duan, and X. Zhang, Space-Time Crystals of Trapped Ions, Phys. Rev. Lett. 109, 163001 (2012).
- [3] P. Bruno, Comment on Quantum Time Crystals, Phys. Rev. Lett. 110, 118901 (2013). F. Wilczek, Wilczek Reply, Phys. Rev. Lett. 110, 118902 (2013). P. Bruno, Comment on Space-Time Crystals of Trapped Ions, Phys. Rev. Lett. 111, 029301 (2013). P. Bruno, Impossibility of Spontaneously Rotating Time Crystals: A No-Go Theorem, Phys. Rev. Lett. 111, 070402 (2013). F. Wilczek, Superfluidity and Space-Time Translation Symmetry Breaking, Phys. Rev. Lett. 111, 250402 (2013).
- [4] T. Koma, H. Tasaki, Symmetry breaking and finitesize effects in quantum many-body systems, J. Stat. Phys. 76, 745 (1994).
- [5] P. Horsch and W. von der Linden, Spin correlations and low lying excited states of the spin-1=2 Heisenberg antiferromagnet on a square lattice, Z. Phys. B 72, 181 (1988).
- [6] H. Watanabe and M. Oshikawa, Absence of Quantum Time Crystals, Phys. Rev. Lett. 114, 251603 (2015).
- [7] D. V. Else, B. Bauer, and C. Nayak, Floquet Time Crystals, Phys. Rev. Lett. 117, 090402 (2016).
 - N. Yao et al. Discrete time crystals: rigidity, criticality, and realizations, arXiv:1608.02589.
 - J. Zhang et al. Observation of a Discrete Time Crystal, arXiv:1609.08684.