

2016 年度ノーベル物理学賞「トポロジカル相転移と、物質のトポロジカル相の理論的発見」

物性研究所 量子物質研究グループ

押川 正毅

1. はじめに

2016 年 10 月 4 日、スウェーデン王立科学アカデミーは、本年のノーベル物理学賞が「トポロジカル相転移と、物質のトポロジカル相の理論的発見」について、デイビッド・サウレス (David Thouless)、ジョン・コステルリッツ (John Kosterlitz)、ダンカン・ハルデン (F. Duncan M. Haldane) の三名に与えられることを発表した。

トポロジーの概念は現代の物性物理学に必要不可欠なものとなっており、その基礎を築いた業績が顕彰されることは、物性物理学にとって、またより広く基礎科学にとっても、大変喜ばしいことである。「トポロジカル相転移」「トポロジカル相」の例は現在では多岐に渡るが、このような概念を確立するきっかけとなった先駆的な業績として、特に以下の 3 件が今回のノーベル物理学賞の授賞対象として挙げられている。

a) (ベレジンスキー)-コステルリッツ-サウレス ((B) KT) 転移

b) サウレス・甲元・ナイチンゲール・デンニイス (Thouless-Kohmoto-Nightingale-den Nijs, TKNN) による、トポロジカル量子数としてのホール伝導度

c) 1 次元量子スピン系におけるハルデンギャップ

この中で、b) のトポロジカル量子数としてのホール伝導度という概念の確立には、物性研究所の元所員である甲元眞人が重要な貢献を行った。そこで、ここでは、甲元の貢献にも注目しつつ、本年のノーベル物理学賞の受賞業績について簡単な解説を行う。c) ハルデンギャップに関しても、その後の筆者を含めた多くの研究者によるさまざまな発展も含めて簡単に触れたい。なお、以下の記事中で番号による引用 ([51] など) はノーベル財団提供の解説資料 [N2016] の引用文献を指すが、本記事で引用したものは末尾に文献情報を再掲した。それ以外に付け加えた引用文献は、イニシャルと年号による引用 ([H1976] など) を行った。また、本記事中では敬称は全て省略させて頂く。

2. TKNN とトポロジカル量子数

量子ホール効果は、半導体界面などで実現される 2 次元電子系が磁場中で示すホール伝導度が e^2/h の整数倍、または分数倍に高精度で量子化される現象である。(標準的な) 量子ホール効果の実験では、電子密度は一定であり磁場を変化させることになる。このとき、磁場の関数としてホール伝導度が一定となるプラトーが現れる。このプラトー上でのホール伝導度が上述のように量子化されるのである。この量子ホール効果は、さまざまな意味で現代の物性物理学において極めて重要な意味を持つ現象であり、整数量子ホール効果と分数量子ホール効果についてそれぞれノーベル物理学賞が与えられている。さらに、以下で述べるように、量子ホール効果の発見は、TKNN を通じて、量子ホール効果自体にとどまらないより一般的な状況での「物理量のトポロジカル量子化」、さらにはトポロジカル量子数によって特徴づけられる、物質の「トポロジカル相」という概念の確立につながったと言える。

量子ホール効果の実験の実験の状況はいったん忘れて、思考実験として、一定の磁場のもとで化学ポテンシャルを変化させて 2 次元電子系のホール伝導度を測定することを考えよう。また、電子間の相互作用はとりあえず無視することにする。磁場中では 2 次元電子のエネルギー準位はランダウ準位に量子化されている。したがって、絶対零度では、化学ポテンシャルがランダウ準位のエネルギーを超えるたびに、そのランダウ準位が電子で完全に満たされる。それぞれのランダウ準位はホール伝導度に e^2/h の寄与をすることが知られているので、化学ポテンシャルの関数としてホール伝導度は階段状に変化し、ステップ部分を除いて e^2/h の整数倍の値を取るようになる。これは実験的に観測されている整数量子ホール効果と類似しているが、考えている状況が違うため整数量子ホール効果の説明にはなっていない。(実際の実験の状況での量子ホール効果を説明するには、不純物を考慮することが必要である [Y1998]。) しかし、この仮想的な「量子ホール効果」も示唆的であり興味深いものである。TKNN は、この仮想的な「量子

3. 運動量空間の仮想ベクトルポテンシャル

先述のように、甲元の論文 [33]では、「TKNN 整数」がブリルアンゾーン上の $U(1)$ ファイバー束のトポロジカル不変量であるチャーン数に他ならないことを示している。この議論は数学的であるが、同時に、甲元は TKNN 整数について非常に物理的な描像も与えている。すなわち、線形応答理論によるホール伝導度は、ブリルアンゾーン上の、あるベクトル場の回転を積分したもので与えられる。このベクトル場は、ブロッホ関数の微分によって与えられ、現在ではしばしば「ベリー接続」と呼ばれるものである。このベリー接続は、ブリルアンゾーン上の仮想的なベクトルポテンシャルとみなすことができ、すると、ホール伝導度は対応する仮想的な磁場をブリルアンゾーン全域で積分したもの（仮想的な全磁束）である。ブリルアンゾーン全域は閉曲面である 2 次元トーラスであり、これを貫く「全磁束」は磁束量子の整数倍に量子化される。これが、TKNN が見出したホール伝導度の e^2/h の整数倍への量子化を与えることになる。

このような描像を得ると、ホール効果について新たな考え方が可能となる。すなわち、磁場によるローレンツ力に起因する古典的なホール効果を離れて、運動量空間におけるベリー接続に起因する仮想的な磁場があればホール効果が起きることになる。後にトポロジカル絶縁体の理論でも重要な役割を果たす、「ハルデン・モデル」における量子ホール効果 [22] も、この一つの実現と言える。時間反転対称性は破るものの単位胞あたりの全磁束がゼロである「ハルデン・モデル」のように、古典的なホール効果よりも TKNN 量子数によって理解できる量子ホール効果を示す系は現在では（整数）チャーン絶縁体と呼ばれ、その「分数版」も含めて盛んに研究が進められている。

現実の物質で観測されるホール効果のうち、外部磁場に依存しない寄与を指す「異常量子ホール効果」の一部も、ここで述べた運動量空間における仮想磁場の効果として理解することができる。実はこの効果は、TKNN 以前にカープラスとラッティンジャーによって指摘されていた [KL1954]。しかし、その重要性や意義は、TKNN からの研究の発展によって認識されるに至り [CN1996]、近年の研究の隆盛につながったと言えるだろう [NSOMO2010]。また、最近注目されているワイル電子系 [NN1983, WTVS2011]においては、「ワイル点」が運動量空間におけるモノポールに対応 [V1987, M2007, O1994]し、そのためにワイル点の周囲に仮想磁場が集中することになる。この仮想磁場のさまざまな効果は、現在の物性物理学にお

けるホット・トピックの一つとなっている [YLR2011]。

このように、運動量空間におけるベリー曲率およびそれに起因する仮想磁場は物性物理学の基礎概念として重要な地位を占めているが、その原点は TKNN であり、甲元の論文 [33] に至って概念が確立されたといって良いだろう。なお、筆者も論文 [33] を学生時代に何ページに何が書いてあるか覚えてしまう程度に何度も読んだが、今見返しても全く古さを感じない、非常に美しくまた教育的な論文である。ファイバー束のトポロジーについての物理学者向けの解説としても秀逸であり、この分野に興味のある若手には必読の文献として薦めたい。

甲元は物性研着任後もトポロジ的な観点からの量子物性物理の研究を推進した。たとえば、3 次元系への TKNN の一般化 [KHW1992] は最近のトポロジカル相の研究の観点からも興味深い。今でこそ、このような研究は当然のものとされている（むしろ流行し過ぎている？）が、最近まで、特に日本国内では比較的マイナーな分野だったと言えるだろう。そのような時代に、甲元による先駆的な研究が物性研究所で行われたことには意義があったものと思われる。たとえば、物性研究所の甲元研究室には助手・助教として初貝安弘、白石潤一、佐藤昌利の 3 名が在籍した。当時はトポロジカルな量子物性物理の研究者人口が少なかったこともあり、自然と分野外からの採用となったが、これが現在の日本でのこの分野の研究の発展に大きく寄与していることは異論のないところであろう [S2011b]。

4. トポロジカル絶縁体と TKNN

近年の物性物理学の重要なトピックに、トポロジカル絶縁体・トポロジカル超伝導体¹があげられる [A2014, B2013]。トポロジカル絶縁体とは、バルクの性質は「自明な」バンド絶縁体と同じであるが、量子ホール状態と同様にギャップレスな端状態（もしくは表面状態）を持つような絶縁体である。この端状態（表面状態）は時間反転対称性によって保護されるので、時間反転対称性がある限りトポロジカル絶縁体を明確に相として定義することができる。ここではその詳細には立ち入らないが、トポロジカル絶縁体は、時間反転対称性の存在下においてブリルアンゾーン上で定義される「 $\mathbb{Z}_2$ トポロジカル量子数」によって定義できる。もちろん、具体的な性質や応用は大きくこととなるが、思想としては、TKNN を一般化したものがトポロジカル絶縁体の理論だと言えるだろう。

たとえば、以下は、トポロジカル絶縁体の概念を最初に明確に提唱したケーンとメレの論文 [KM2005] の冒頭の段

The classification of electronic states according to topological invariants is a powerful tool for understanding many body phases which have bulk energy gaps. This approach was pioneered by Thouless, Kohmoto, Nightingale, and den Nijs [1] (TKNN), who identified the topological invariant for the noninteracting integer quantum Hall effect. The TKNN integer, n , which gives the quantized Hall conductivity for each band $\sigma_{xy} = ne^2/h$, is given by an integral of the Bloch wave functions over the magnetic Brillouin zone, and corresponds to the first Chern class of a $U(1)$ principal fiber bundle on a torus [2,3]. An equivalent formulation, generalizable to interacting systems, is to consider the sensitivity of the many body ground state to phase twisted periodic boundary conditions [4,5]. This topological classification distinguishes a simple insulator from a quantum Hall state, and explains the insensitivity of the Hall conductivity to weak disorder and interactions. Nonzero TKNN integers are also intimately related to the presence of gapless edge states on the sample boundaries [6].

A bar chart illustrating the annual number of deaths from COVID-19 in the United States from 1980 to 2020. The x-axis represents the years, with labels every five years (1985, 1990, 1995, 2000, 2005, 2010). The y-axis represents the number of deaths, ranging from 0 to 200 in increments of 50. The chart shows that while there were very few deaths from 1980 to 2017, there was a dramatic surge starting in 2018, with the number of deaths rising to nearly 200 in 2020.

Year	Deaths
1980	2
1981	18
1982	15
1983	20
1984	22
1985	20
1986	22
1987	20
1988	18
1989	20
1990	22
1991	25
1992	32
1993	35
1994	30
1995	28
1996	35
1997	25
1998	28
1999	12
2000	15
2001	22
2002	30
2003	28
2004	30
2005	25
2006	40
2007	35
2008	52
2009	55
2010	95
2011	110
2012	140
2013	165
2014	190

5. ハルデン予想

- 半奇数スピン($S=1/2, 3/2, \dots$): 励起ギャップなし、相関関数がべき的に減衰
- 整数スピン($S=1, 2, \dots$): 励起ギャップあり、相関関数が指数関数的に減衰

6. ハルデン予想の波及効果

Age Group	Percentage of Respondents
18-24	85
25-34	75
35-44	70
45-54	65
55-64	60
65-74	55
75+	15

このように、ハルデン予想は、予想そのものの適用範囲にとどまらず、いくつもの新たな研究の潮流をつくりだし、それらはいずれも現在の物性物理学・統計力学において非常に重要なものとなっている。

本記事では BKT 転移についての議論は他に譲ることとして省略するが、これはもちろん BKT 転移が重要でないという意味ではなく、おそらく今回の 3 つの主要な受賞業績の中でも最も重要と言っても良いであろう。実際、BKT 転移は、ハルデン予想を含む 1 次元量子スピン系の理解にも必要不可欠な概念となっている。他の 2 件についても、もちろんその意義や波及効果の全てを紹介できたわけでは全くないが、本記事で紹介できた範囲でも、今回の受賞業績が、新しい研究の潮流を作り出した、極めて波及効果の大きなものであったことをご理解頂けるかと思う。

近年のメディア等の下馬評では、トポロジカル絶縁体がノーベル賞の候補としてしばしば取り上げられていた。もちろん、トポロジカル絶縁体は重要な発見であり、工学的な応用への期待も含めて今後もノーベル物理学賞の有力な候補であり続けるだろう。しかし、ここで述べたように、トポロジカル絶縁体の研究も、TKNN などの「トポロジカル相」「トポロジカル相転移」に関する先駆的な研究を基礎にしたものである。今回、ノーベル賞がまずこれらの先駆的かつ基礎的な業績に与えられることは、ノーベル賞委員会の高い見識を示したものと言えるのではないだろうか。

ノーベル賞に限らないことだが、特にノーベル賞については、その反響の大きさと受賞者が存命の 3 名までという制限にまつわって、さまざまな議論が起こることが多い。今回の受賞者の選択についてはおそらく異論は少ないものと思うが、もちろん受賞者のみが受賞対象となった業績に

A group of five people are seated at a long, dark wooden outdoor table. From left to right: a man in a light green polo shirt, a man in a brown jacket, a woman in a blue top, a man in a light blue shirt, and a man in a black t-shirt with glasses. The table is set with several glasses of wine and water, blue napkins, and a wicker basket containing bread. A large blue patio umbrella is positioned over the table. In the background, a street with parked cars and buildings is visible.

A man in a dark suit and striped tie is speaking into a microphone. He is holding a large bouquet of pink flowers wrapped in clear plastic. He stands in a room with a wooden wall featuring shelves with various decorative items like vases and small plants. A round wooden table with a laptop on it is visible to his right. The floor is covered with a patterned carpet.

Age Group	Percentage of Respondents
18-29	~85%
30-39	~82%
40-49	~78%
50-59	~75%
60-69	~70%
70-79	~65%
80+	~60%

参考文献

- [1] I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki, Rigorous results on valence-bond ground states in antiferromagnets. *Phys. Rev. Lett.* **59**, 799 (1987).
- [2] I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki, Valence bond ground states in isotropic quantum antiferromagnets, in *Condensed Matter Physics and Exactly Soluble Models*, pages 253–304, Springer (1988).
- [5] J. E. Avron, R. Seiler, and B. Simon, Homotopy and quantization in condensed matter physics. *Phys. Rev. Lett.* **51**, 51, (1983).
- [16] M. den Nijs and K. Rommelse, Preroughening transitions in crystal surfaces and valence-bond phases in quantum spin chains. *Phys. Rev. B* **40**, 4709 (1989).
- [19] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Physics*, Addison Wesley (1991) [Second Edition: Cambridge University Press, 2013]
- [21] F.D.M. Haldane, Continuum dynamics of the 1-D Heisenberg antiferromagnet: Identification with the O(3) nonlinear sigma model. *Phys. Lett. A*, **93**, 464, (1983).
- [22] F. D. M. Haldane, Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of the "Parity Anomaly". *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2015 (1988).
- [23] F.D.M. Haldane, Nonlinear Field Theory of Large-Spin Heisenberg Antiferromagnets: Semiclassically Quantized Solitons of the One-Dimensional Easy-Axis Néel State. *Phys. Rev. Lett.*, **50**, 1153 (1983).
- [30] T. Kennedy and H. Tasaki, Hidden $Z_2 \times Z_2$ symmetry breaking in Haldane gap antiferromagnets, *Phys. Rev. B* **45**, 304 (1992).
- [33] M. Kohmoto, Topological invariant and the quantization of the Hall conductance, *Ann. Phys.* **160**, 343 (1985).
- [37] R. B. Laughlin, Quantized hall conductivity in two dimensions. *Phys. Rev. B* **23**, 5632 (1981).
- [45] F. Pollmann, A. M. Turner, E. Berg, and M. Oshikawa, Entanglement spectrum of a topological phase in one dimension, *Phys. Rev. B* **81**, 064439 (2010).
- [51] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 405 (1982).
- [54] Z.-C. Gu and X.-G. Wen, Tensor-entanglement-filtering renormalization approach and symmetry-protected topological order. *Phys. Rev. B* **80**, 155131 (2009).
- [A1981] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, I. E. Dzyaloshinskii, A. I. Larkin, A. B. Migdal, L. P. Pitaevskii, and I. M. Khatatnikov, Vadim L'vovich Berezinskii (Obituary), *Sov. Phys. Usp.* **24**, 249 (1981).
- [A1989] 初期のレビューとして、たとえば I. Affleck, Quantum Spin Chains and the Haldane Gap. *J. Phys.: Condens. Matter*, **1**, 3047 (1989).
- [A2014] 教科書として、たとえば 安藤陽一「トポロジカル絶縁体入門」講談社 KS 物理専門書 (2014).
- [AGD1963] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, and I. E. Dzyaloshinskii, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Prentice-Hall (1963).
- [AL1984] I. Affleck and E. H. Lieb, *Lett. Math. Phys.* **12**, 57 (1984).
- [B2013] 教科書として、たとえば B. A. Bernevig (with T. L. Hughes), *Topological Insulators and Topological Superconductors*, Princeton University Press (2013).
- [CN1996] M. Chang and Q. Niu, *Phys. Rev. B* **53**, 7010 (1996).
- [E2011] M. Endres, M. Cheneau, T. Fukuhara, C. Weitenberg, P. Schauss, C. Gross, L. Mazza, M.C. Banuls, L. Pollet, I. Bloch, S. Kuhr, Observation of Correlated Particle-Hole Pairs and String Order in Low-Dimensional Mott Insulators. *Science* **334**, 200 (2011).
- [FNS1992] M. Fannes, B. Nachtergaele, and R. F. Werner, Finitely correlated states on quantum spin chains, *Comm. Math. Phys.* **144**, 443 (1992).
- [GJOS2014] 冷却原子系における人工的なゲージ場のレビューとして、たとえば N. Goldman, G. Juzeliunas, P. Ohberg, I. B. Spielman, Light-induced gauge fields for ultracold atoms. *Rep. Prog. Phys.* **77**, 126401 (2014).
- [H1976] D. R. Hofstadter, Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields, *Phys. Rev. B* **14**, 2239 (1976).
- [H2004] M. B. Hastings, Lieb-Schultz-Mattis in higher dimensions. *Phys. Rev. B* **69**, 104431 (2004).
- [HOO2016] ハルデン予想は 1 次元量子スピン系の非線形シグマ模型による記述により見出されたというのが一般に知られている（出版論文からたどることのできる）歴史だが、ハルデン本人の回想によると実際に着想に至った経緯はこれとは異なるということである。これについては、以

下に出版予定である。

F. D. M. Haldane, H. Ooguri, M. Oshikawa, Round-Table Talk. *Kavli IPMU News* Vol. 36 (December 2016).

[K1989] 甲元眞人「物性研に着任して」物性研だより **29**(2), 1 (1989)

[K1990] T. Kennedy, Exact diagonalisations of open spin-1 chains. *J. Phys. Condens. Matter.* **2**, 5737 (1990).

[KHW1992] M. Kohmoto, B. I. Halperin, Y. S. Wu, Diophantine equation for the three-dimensional quantum Hall effect. *Phys. Rev. B* **45**, 13488 (1992).

[KKT1983] M. Kohmoto, L. P. Kadanoff, and C. Tang, Localization Problem in One Dimension: Mapping and Escape, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1870 (1983).

[KL1954] R. Karplus and J. M. Luttinger, Hall Effect in Ferromagnetics. *Phys. Rev.* **95**, 1154 (1954).

[KM2005] C. L. Kane and E. J. Mele, Z₂ Topological Order and the Quantum Spin Hall Effect, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 146802 (2005).

[KSZ1993] A. Klümper, A. Schadschneider, J. Zittartz, Matrix-product-groundstates for one-dimensional spin-1 quantum antiferromagnets. *Europhys. Lett.* **24**, 293 (1993).

[LSM1961] E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis, Two soluble models of an antiferromagnetic chain. *Ann. Phys.* **16**, 407 (1961).

[M1979] N. D. Mermin, The topological theory of defects in ordered media, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 591 (1979).

[M2007] S. Murakami, Phase transition between the quantum spin Hall and insulator phases in 3D: emergence of a topological gapless phase. *New J. Phys.* **9**, 356 (2007).

[NS2007] B. Nachtergaele and R. Sims, A Multi-Dimensional Lieb-Schultz-Mattis Theorem. *Commun. Math. Phys.* 276, (2007).

[N2016] Class for Physics of the Royal Swedish Academy of Sciences, Scientific Background on the Nobel Prize in Physics 2016 “TOPOLOGICAL PHASE TRANSITIONS AND TOPOLOGICAL PHASES OF MATTER”, URL https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2016/advanced.html (revised version)

[NN1981] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Absence of neutrinos on a lattice: (I). Proof by homotopy theory. *Nucl. Phys.* **B185**, 20 (1981); Absence of neutrinos on a lattice:

(II). Intuitive topological proof, *Nucl. Phys.*, **B193**, 173 (1981).

[NN1983] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, The Adler-Bell-Jackiw anomaly and Weyl fermions in a crystal. *Phys. Lett. B* **130** 389 (1983).

[NSOMO2010] レビューとして、たとえば N. Nagaosa, J. Sinova, S. Onoda, A. H. MacDonald, and N. P. Ong, Anomalous Hall Effect. *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1539 (2010).

[O1992] M. Oshikawa, Hidden Z₂×Z₂ symmetry in quantum spin chains with arbitrary integer spin. *J. Phys.: Condens. Matter.* **4**, 7469 (1992).

[O1994] M. Oshikawa, Quantized Hall conductivity of Bloch electrons: Topology and the Dirac fermion *Phys. Rev. B* **50**, 17357 (1994).

[O2000] M. Oshikawa, Commensurability, Excitation Gap, and Topology in Quantum Many-Particle Systems on a Periodic Lattice. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1535 (2000); Topological Approach to Luttinger's Theorem and the Fermi Surface of a Kondo Lattice. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3370 (2000).

[O2003] M. Oshikawa, Insulator, Conductor, and Commensurability: A Topological Approach. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 236401 (2003); (E) **91**, 109901 (2003)

[O2012] 押川正毅「研究室だより 押川研究室」物性研だより **52**(3), 25 (2012).

[O2014] R. Orus, A Practical Introduction to Tensor Networks: Matrix Product States and Projected Entangled Pair States. *Ann. Phys.* **349**, 117 (2014).

[OYA1997] M. Oshikawa, M. Yamanaka, and I. Affleck, Magnetization Plateaus in Spin Chains: “Haldane Gap” for Half-Integer Spins. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1984 (1997).

[PBT02012] F. Pollmann, E. Berg, A. M. Turner, M. Oshikawa, Symmetry protection of topological order in one-dimensional quantum spin systems. *Phys. Rev. B* **85**, 075125 (2012).

[PTAV2013] S. A. Parameswaran, A. M. Turner, D. P. Arovas, and A. Vishwanath, Topological order and absence of band insulators at integer filling in non-symmorphic crystals. *Nature Phys.* **9**, 299 (2013)

[S1983] B. Simon, Holonomy, the Quantum Adiabatic Theorem, and Berry's Phase. *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2167 (1983).

[S2011a] U. Schollwöck, The density-matrix renormalization group in the age of matrix product states. *Ann. Phys.* **326**, 96 (2011).

[S2011b] たとえば、もともとは素粒子論の研究者であった元助手・助教の佐藤昌利がトポロジカル量子物性の分野で活躍するようになるまでの経緯について：佐藤昌利「第8回物性研究所所長賞学術奨励賞所感」物性研だより 51(2), 19 (2011).

[S2012] B. Swingle, Entanglement renormalization and holography. *Phys. Rev. D* **86**, 065007 (2012).

[T1992] この夏の学校での講義に基づく講義ノートが以下に収録されており、解説として今も価値が高い：田崎晴明「講義ノート 量子スピン系の理論 Haldane Gap, Disordered Ground States, Quantum Spin Liquid and All That in Quantum Spin Systems」物性研究 **58**(2), 121 (1992).

[TOYNT2001] スピンのカイラル構造が有効的な強磁場を生む例として: Y. Taguchi, Y. Oohara, H. Yoshizawa, N. Nagaosa, Y. Tokura, Spin Chirality, Berry Phase, and Anomalous Hall Effect in a Frustrated Ferromagnet, *Science* **291**, 2573 (2001).

[V1987] G. E. Volovik, Zeros in the fermion spectrum in superfluid systems as diabolical points. *JETP Lett.* **46**, 98 (1987).

[V2003] G. Vidal, Efficient Classical Simulation of Slightly Entangled Quantum Computations. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 147902 (2003).

[WPVZ2015] H. Watanabe, H. C. Po, A. Vishwanath, M. P. Zaletel, Filling constraints for spin-orbit coupled insulators in symmorphic and non-symmorphic crystals, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **112**, 14551 (2015)

[WTVS2011] X. Wan, A. M. Turner, A. Vishwanath, and S. Y. Savrasov, Topological semimetal and Fermi-arc surface states in the electronic structure of pyrochlore iridates. *Phys. Rev. B* **83**, 205101 (2011).

[Y1998] 教科書として、たとえば 吉岡大二郎「量子ホール効果」岩波書店 新物理学選書 (1998).

[Y2005] 初めての実験的検出ではないが、印象的な実験の例として: M. Yoshida, K. Shiraki, S. Okubo, H. Ohta, T. Ito, H. Takagi, M. Kaburagi, and Y. Ajiro, Energy Structure of a Finite Haldane Chain in $\text{Y}_2\text{BaNi}_{0.96}\text{Mg}_{0.04}\text{O}_5$ Studied by High Field Electron Spin Resonance. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 117202 (2005).

[YLR2011] K.-Y. Yang, Y.-M. Lu, and Y. Ran, Quantum Hall effects in a Weyl semimetal: Possible application in pyrochlore iridates, *Phys. Rev. B* **84**, 075129 (2011).

[YOA1997] M. Yamanaka, M. Oshikawa, and I. Affleck, Nonperturbative Approach to Luttinger's Theorem in One Dimension. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1110 (1997).