

はでき ~~ま~~せん。超伝導の標準的な理論として知られるバーディーン-クーパー-シュリーファー(BCS)理論は、このような状況を記述しています。カイラル超流動体・超伝導体の場合には、強結合の BEC 側と弱結合の BCS 側は別の相であり、量子相転移で明確に隔てられています。現代的な見方では、強結合 BEC 相はトポロジカルには「自明な」相であるのに対し、カイラル超流動体の弱結合 BCS 相はエッジ状態を伴うトポロジカル超流動相ということになります。弱結合 BCS 相では引力相互作用が弱いため、上述のように全軌道角運動量が $L_z \approx v(\Delta/\varepsilon_F) \times N/2$ と抑制されるのが自然に見えます。一方、引力相互作用が弱い場合でも、超流動相の基底状態では液体の密度の 100%が超流動密度となることが知られています。この観点からは、やはり全てのフェルミ粒子がクーパー対を形成し $L_z \approx L_z^{\text{full}}$ となるようにも思えます。「固有角運動量パラドックス」は、主に弱結合の BCS 相に関して問題とされてきましたが、このような「直観の効きにくさ」が研究者達を長い間悩ませてきました。

フェルミ粒子であるヘリウム 3 の液体は極低温で超流動を示しますが、その中でも超流動 A 相と呼ばれる相はカイラル p 波超流動体 ($v = 1$) であることが実験的にも確立しています。液体ヘリウム 3 では引力相互作用はフェルミエネルギーに比べて極めて弱く、弱結合の BCS 相に属する典型的な超流動体です。このような系においても、近年では様々な理論計算によって $L_z \approx L_z^{\text{full}} = N/2$ を支持する結果が多く報告されています。しかし、その本質的な理由は明らかにされていませんでした。全軌道角運動量は実験による直接測定が難しいこともあり、決定打にかけられる状況が続いていました。

我々の理論

上述のような状況をふまえ、我々はまず、何が問題を難しくしているのかを理解することから始めました。超流動体の軌道角運動量をきちんと理論的に取り扱うには、十分大きな容器に超流動体を閉じ込めた状態を考える必要があります。ヘリウムや冷却原子系の実験でも粒子は容器やポテンシャルによって空間的に閉じ込められていますので、その観点からもこれはごく自然な問題設定です。すると、容器の壁によって超流動体の境界がつくられることとなります。壁のような境界のある系というのは理論的取扱いが難しくなりますが、この部分を正確に計算しないとパラドックスの解決に近づくことはできません。特に、境界を持つカイラル超流動体においては、境界に沿って流れる「エッジ流」が存在することが知られています。このエッジ流が軌道角運動量に寄与するため、境界の扱いは非常に重要となります。一方、これまでの既存の理論では、容器壁の影響をきちんと扱わずに、妥当性の明確でない近似や仮定がしばしば使われていました。

このような基本的認識の下、図 1 のような 2 次元の回転対称な円盤に閉じ込められた引力相互作用をするフェルミ粒子系について、標準的なモデルであるボゴリューボフ-ドジャン・ハミルトニアンを考えました。ボゴリューボフ-ドジャン・ハミルトニアンは相互作用について一種の平均場近似を行ったものですが、この単純化されたモデルの範囲内では境界の取り扱いも含め正確な議論を行うことを目標にしました。

まず最初に、我々はヴォロヴィクの議論[1]を拡張することにより、絶対零度における全軌道角運動量の期待値が

$$L_z = vN/2 - Q \quad \dots (1)$$

と表されることを示しました。 Q はスペクトル非対称性と呼ばれ、ハミルトニアンの正と負の固有値の個数差だけから定まります。この量が、全てのフェルミ粒子がクーパー対を形成した場合に期待される $L_z^{\text{full}} = vN/2$ という値からの、全軌道角運動量のずれを与えることとなります。以下では、(1)式に基づいて、エネルギースペクトルに着目して軌道角運動量を議論します。

具体的にカイラル p 波超流動体の場合にスペクトルを求めてみると、図 2(左)にあるように、強結合の BEC 相ではスペクトルは上下対称で、正と負の固有値の数は等しく、 $Q = 0$ となります。このことから、物理的にも予想できたように、 $L_z \approx L_z^{\text{full}} = vN/2$ であることを厳密に導くことができます。これに対して、図 2(右)のように、弱結合の BCS 相ではエッジ流を与えるギャップレスモードがスペクトルに現れます。このように BEC 相と異なるスペクトルを持つことから、 $Q \neq 0$ となりそうにも思われます。しかし、カイラル p 波超流動体の場合、弱結合の BCS 相においても、実は厳密に $Q = 0$ が成立します。このことは、以下のように理解できます。仮想的に化学ポテンシャル μ を変化させることを考えましょう。これはクーパー対の結合の強さを有効的に変化させることに相当し、基底状態は $\mu < 0$ では強結合 BEC 相、 $\mu > 0$ では弱



結合 BCS 相になることが知られています。すなわち、 $\mu=0$ で量子相転移が起きることになります。このように化学ポテンシャル μ を連続的に変化させたとき、ハミルトニアン固有値はそれぞれが連続的に変化するため、スペクトル非対称性 Q が変化するためには固有値のいずれかがゼロを横切る必要があります。このとき系のエネルギーギャップは閉じることになります。BCS 相では前述のようにギャップレスのエッジモードが現れるのですが、実はスペクトルが厳密な意味でギャップレスになるのは系の大きさが無限大の熱力学的極限のみで、有限の大きさの系では全ての固有値が BEC 相から BCS 相までゼロを横切ることなく符号を保ったままで変化します。したがって、BEC 相でも BCS 相でもカイラル p 波超流動体では常に $Q=0$ であり、これから直ちに $L_z=L_z^{\text{tot}}=N/2$ となるのが導けます。すなわち、全軌道角運動量はクーパー対の結合の強さに全く依存しないということになります。また、 $L_z=N/2$ という全軌道角運動量を生み出すために、容器壁に沿ってエッジ質量流 $J=n/4$ (n は粒子数密度) が流れていることも分かります。ここにもやはり、因子 Δ/ε_F は現れません。

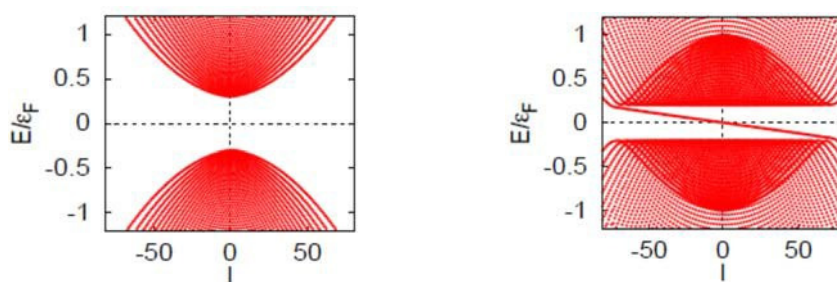


図 2：カイラル p 波超流動体のエネルギースペクトル[2]。(左)BEC 相と(右)BCS 相。横軸は 1 粒子の軌道角運動量で、円盤の円周に沿った運動量に対応しています。

このようなカイラル p 波超流動体における結果は近年の多くの理論研究と一致しており、ある程度予想できたものですが、驚くべきことに、 d 波以上 ($v \geq 2$) のカイラル超流動体においては大きく結果が異なってきます。この場合に上と同様の計算を行ってみると、強結合 BEC 相ではやはり $L_z=vN/2$ である一方、弱結合 BCS 相では $L_z \ll N$ という結果が得られたのです。このことも、上と同様に化学ポテンシャルの変化に伴うスペクトルの変化によって理解することができます。例として、カイラル d 波超流動体の場合を考えましょう。この場合も $\mu < 0$ の強結合 BEC 相でのスペクトルはカイラル p 波の場合[図 2(左)]とほとんど同じ形をしています。一方、 $\mu > 0$ の弱結合 BCS 相では図 3(左)のように 2 つのエッジモードが現れます。カイラル p 波超流動体の場合には図 2(右)のようにエッジモードは 1 つしかなかったもので、質的な違いがあることになります。化学ポテンシャルの変化に伴ってスペクトルが変化する際に、この違いが重要な働きをします。カイラル d 波超流動体が $\mu > 0$ の弱結合 BCS 相で図 3(左)にあるような 2 つのエッジモードを形成するためには、1 粒子の角運動量 l が l_1 と l_2 に挟まれた領域で、強結合 BEC 相から化学ポテンシャルを変化させたときにハミルトニアンの固有値がゼロを横切って符号を変える必要があります[図 3(右)]。これに伴って正と負のエネルギー固有値の個数に差が生じ、 Q が正の値を取るようになります。これが BCS 相における全軌道角運動量の抑制をもたらします。

詳しく解析すると、このような数学的振る舞いは、物理的にはクーパー対の破壊効果と関係していることが分かります。つまり、 d 波以上の弱結合 BCS 相で見られる正の Q は、エッジモードを形成するときに容器壁においてクーパー対を破壊する散乱が必然的に起こってしまい、その結果、エッジ質量流が小さくなってしまふ、ということを表しているのです。これに伴い、全軌道角運動量は $L_z=N \times O(\Delta/\varepsilon_F)$ のように大幅に抑制されることになります。この対破壊効果はどんなに容器壁がクリーンでも存在し、エッジモードの出現というギャップ関数のトポロジカルな構造と密接に結びついているという点において、今までに知られていた対破壊効果とは質的に異なる新しいものです。さらに注意すべき点は、 L_z の抑制はこの隠された対破壊効果によるものであって、もともとのパラドックスの起源となった「フェルミ面付近の低エネルギーのフェルミ粒子のみがクーパー対を形成する」という議論では理解できないという点です。このように、我々の研究は、カイラル超流動体における全軌道角運動量の問題における新しい側面を発見したものと言えると思います。

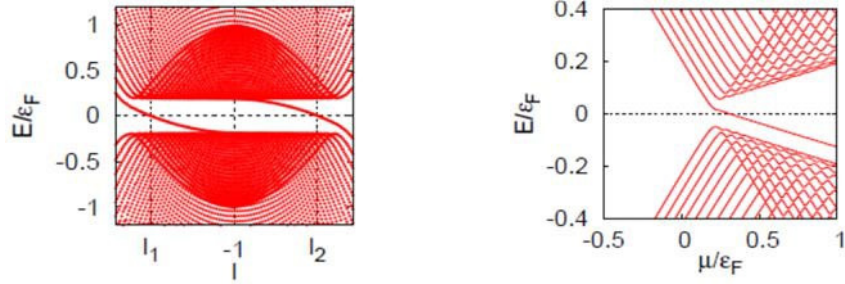


図 3 : (左)カイラル d 波超流動体の BCS 相におけるスペクトル[2]。
 (右)ある $l(l_1 < l < -1)$ における、化学ポテンシャルを変化させたときのエネルギー固有値の振る舞い。正と負の固有値の個数差が変化している様子が分かります。

今後の発展

以上のように、我々は理想的な状況をさらに単純化したモデルの範囲内ではありますが、カイラル超流動体における全軌道角運動量を計算し、エッジモードの出現に付随する対破壊効果の重要性を明らかにしました。我々の研究に関連して、その後、 Sr_2RuO_4 に対応するマイクロなモデルを用いてカイラル p 波超伝導体のエッジ電流が再検討されるなど[4]、エッジ流や軌道角運動量の物理に関して世界中で活発な研究が続いています。このようにして軌道角運動量の問題に隠された豊富な物理が明らかにされつつありますが、「固有角運動量パラドックス」の完全な解決にはさらなる研究が必要であると考えられます。たとえば、 Sr_2RuO_4 のようなカイラル超伝導体は実験・理論の両面から盛んに研究されておりエッジ電流の直接観測も試みられて来ましたが、カイラル超伝導体の場合は特に不純物や乱れがエッジ電流に与える影響が重要と考えられます。さらに、結晶格子やサンプルの形状がそもそも回転対称ではないので、回転対称でクリーンな系を対象とした我々の理論が現実的なカイラル超伝導体にどのように拡張されるかは興味ある問題です。また、これまでの理論的研究は、今回の我々の研究を含めて、ボゴリューボフ-ドジャン・ハミルトニアン の枠内にとどまっています。先述のように、これは粒子間の相互作用を一種の平均場理論で扱うものですが、この過程でゲージ対称性(質量流保存則)を破ることになります。軌道角運動量の問題では質量流保存則が重要なので、ゲージ対称性を保った理論で全軌道角運動量はどうなるかは非自明であり、これからの問題です。

謝辞

本研究は、当時、物性研・押川研究室博士後期課程に在籍していた聶文星(Nie Wenxing)博士(現・清華大学高等研究所)との共同研究です。また、本研究の動機である「固有角運動量パラドックス」の問題は、前野義輝教授(京都大学)に教えて頂きました。石川修教授(大阪市立大学)には実験家の立場から有意義なコメントを頂きました。本研究は、主に科学研究費新学術領域「対称性の破れた凝縮系におけるトポロジカル量子現象」公募研究(研究課題番号 25103706 カイラル p 波超流動体の固有角運動量とエッジ流の解明)の補助を受けて行われました。

- [1] 教科書として、D. Vollhart and P. Wölfle, “*The Superfluid Phase of Helium 3*” (Taylor & Francis, 1990); G. E. Volovik, “*The Universe in a Helium Droplet*” (Oxford University Press, 2003); A. J. Leggett, “*Quantum Liquids*” (Oxford University Press, 2006). また、Leggett の講義録 “Exotic Superconductivity” (物性研究、vol.1, No. 1, 2012) でも軌道角運動量の問題が少し取り上げられています。
- [2] Yasuhiro Tada, Wenxing Nie, and Masaki Oshikawa, Phys. Rev. Lett. **114**, 195301 (2015).
- [3] 財形新聞 2015.5.18 URL <http://www.zaikei.co.jp/article/20150518/249750.html>、オプトロニクスオンライン 2015.5.20 URL <http://optronics-media.com/news/20150520/31965/>
- [4] Thomas Scaffidi and Steven H. Simon, Phys. Rev. Lett. **115**, 087003 (2015).