

加藤岳生著「ゼロから学ぶ統計力学」(講談社サイエンティフィック)  
コーヒブレーク番外編:スピンってなに?

東京大学物性研究所 加藤岳生

<https://kato.issp.u-tokyo.ac.jp/kato/statphys.html>

ゴールデンウィークを前にして、学生達はまったく変わらない様子で、勝手気ままに3時のおやつをつまんでいた。ゴールデンウィークは全く関係ないといった風情だ。

助教：奈々子さん、おやつありますけど、いかがですか？

奈々子：私はコーヒーだけで大丈夫です。

しかし、そう言いつつも、奈々子さんはお菓子のほうをちらちらと見やっていた。本当は食べたいのだが、ダイエットをしているのだ。そこへ、先生がのそのそをお茶部屋にやってきた。どっかと椅子に座ると、さっそくビスケットを手を伸ばし、ぼりぼりとかじりだした。

先生：ゴールデンウィークだというのに、研究室の学生連中はどこに遊びに行くでもない様子だな。普段、休日に何をしているんじゃ。

助教：家で寝てたり、ゲームをやったりしながら過ごしているみたいですよ。

先生：なんじゃ、だらしないな。わしが若い頃は・・・えーと何してたっけ。わしも、家でごろごろしてた記憶しかないな。うむ。諸君、ごろごろしてよろしい。

奈々子さん：私は旅行にいきますからね。えっへん。ところで、統計力学の授業で質問があるのですが。

先生：おう、なんじゃ。

奈々子さん：核スピンというものがでてきましたが、うまく理解できないんです。授業では「磁石みたいなもの」といってましたが、 $z$ 軸方向正の向き(スピン↑)か、負の向き(スピン↓)かの、二通りしか状態がないとも説明されましたよね。でも「磁石みたいなもの」であれば、中途半端な方向、例えば $x$ 軸方向に向くことだってできるはずですよ。なぜ、そんな状態がでてこないのでしょうか。

先生：いや、そういう状態はちゃんとある。 $z$ 軸は単に我々が勝手に指定した向きだから、別の向き、例えば $x$ 軸方向にスピンの向く状態もちゃんとある。でもそれは、スピン↑・スピン↓の状態と一次独立じゃないんだ。

奈々子さん：へ？どういうこと？

先生：おっと、いきなり難しくいいすぎたかな。これは量子力学特有の性質なんだ。わかりやすく言えば、「 $x$ 方向に向くスピン状態は、スピン↑とスピン↓の重ね合わせ状態」なんだ。具体的には、 $x$ 方向正の向きにスピンの向く状態をスピン $\rightarrow$ 、負の向きの向く状態をスピン $\leftarrow$ と書くことにすると、 $(\rightarrow) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\downarrow)$  および  $(\leftarrow) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\downarrow)$  となるな。

奈々子さん：うあ。頭がくらくらするわ。まず、 $(\rightarrow) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\downarrow)$  ってどういう状態なの？

先生：もしスピン $\rightarrow$ 状態にあったとき、 $z$ 方向のスピンを測定すると、スピン↑である状態が $(1/\sqrt{2})^2 = 1/2$ の確率で、スピン↓である状態が $1/2$ の確率で、それぞれ観測されるんだ。係数の二乗が確率に対応するんだ。これは量子力学の基本的な法則なんだ。それから係数の二乗の和は、全確率1にならないといけないから、係数が $1/\sqrt{2}$ となるんだ。言い換えると、任意の状態の

「長さ」は1になるようにしておくんだな。

奈々子さん：ははぁん。なんとなくわかってきたわ。これは二次元のベクトルと同じね。 $z$ 方向についての状態はスピン↑状態を $(1, 0)$ 、スピン↓状態を $(0, 1)$ の単位ベクトルにすればいいのね。このとき、 $x$ 方向についての状態はスピン→状態が $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ 、スピン←状態が $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ に対応するわけですね。

先生：お、筋がいいな。その通りじゃ。「スピンが2状態しかない」というのは、「一次独立な基底が2個までしかとれない」ということを意味するんじゃ。

奈々子さん：あれ？でもそれじゃ、 $y$ 方向に向いたスピン状態はどうなるのかしら。もう、これ以上うまく重ね合わせ状態をつくれないうな気がするけど。

先生：ふっふっふ。それがつくれるんじゃな。 $y$ 方向のスピン状態をスピン↗、スピン↘と書くことにすると、 $(\nearrow) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow) + \frac{i}{\sqrt{2}}(\downarrow)$ 、 $(\searrow) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow) - \frac{i}{\sqrt{2}}(\downarrow)$ という重ね合わせ状態が出来る。係数の $i$ は虚数だな。複素数の係数もありなんだ。

奈々子さん：うわぁ、ずるい。

先生：自然界がそうなっているんだから、仕方ない。文句があるなら、神様にいってくれ。

奈々子さん：それにしても、量子力学というのは不思議な学問ですね。

先生：そうだな。真に不思議な学問といえる。でも、それが自然界でちゃんと成り立っているのは奇跡的なことだ。世の中で量子力学を真に理解している人は、10000人に1人もいないかもしれないな。

助教：先生、それは少しいすぎなんじゃ。

先生：いや、そうでもないと思っておる。そりゃ、量子力学を学んだ人は多いだろう。でもそれは、教科書を読んだとか、授業を受けたとか、そのレベルまでなんだと思うんだ。量子力学が本当に「いかれた」学問だということに気付いていない人は多いと思う。その証拠に、今の核スピンの例だって、よく考えると不思議だぞ。

奈々子さん：どのへんが不思議なんですか？

先生：例えば、始めスピンの状態がスピン→ $= \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\downarrow)$ であったとしよう。さっき説明したように、この状態でスピンの $z$ 方向の状態を観測すると、「確率1/2でスピン↑、確率1/2でスピン↓」が観測される。でもこれは、「スピンの状態はスピン↑、スピン↓のどちらかであるが、情報が不足していて確率的に半々の確率でスピン↑、スピン↓としかいえない」というのは、全く違うんだよ。 $x$ 方向にスピンが向いた状態は、本当に「スピン↑とスピン↓の量子力学的な重ね合わせ状態」としか言いようのないものなんだ。

助教：確かに、スピン↑とスピン↓が単に半々の確率でまざっているだけだとすると、 $x$ 方向にスピンの向きようがないですからね。

奈々子さん：そうだとすると、「確率」というのは二種類あるってこと？

先生：その通りじゃ。確率には二種類あるのだ。高校までの数学でてくる普通の「確率」と、量子力学に出てくる「確率」は意味が全く違うんじゃよ。普通の確率はたいてい、サイコロのように「複雑な運動の結果生じる結果」のような不確定性のある現象とか、コインを投げてその表裏の結果を見ないままお椀で隠したときのように「情報の不足」がある場面ででてくるものだな。でも量子力学でてくる「確率」はそういうものじゃないんだ。情報が足りないのではないし、複雑でもないのだが、それでも「確率的にしかものがいえない」特別な状態というのがあるんだ。それが「重ね合わせ状態」なんだよ。

奈々子さん：統計力学にでてくる確率は、どっちなのかしら？

先生：安心したまえ。私の統計力学の授業ででてくる確率は、すべて「普通の確率」だ。量子力学の「確率」は、滅多なことでは統計力学に顔を出さないから、気にしなくてもよろしい。

奈々子さん：もう一つ気になることがあるわ。 $(\rightarrow) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\downarrow)$  の状態で、 $z$  方向のスピンを観測すると、確率  $1/2$  でスピン  $\uparrow$  状態になるのよね。でもこれ、観測後は  $\uparrow$  になるのよね。これはつまり、「観測前のスピン状態 (スピン  $\rightarrow$ ) が観測によってスピン  $\uparrow$  に変化する」てことよね。「観測したら状態が変わる」って、本当なの？

先生：本当にそうなるんだ。観測が状態を変えてしまうんだよ。あっ、そうだ。「物理的に間違っているが、心理的に正しい比喻」を伝授しようかな。私は最近体重計に乗っていないのだが、それは心理的に「100 キロを超えている私と 100 キロを超えてない私の重ね合わせ状態」というべきものだな。

奈々子さん：いやな状態ね。

先生：この重ね合わせ状態は、情報の不足とか、そんなものではなくて、本当に「重ね合わせ状態」としかいえない状態をイメージしてほしい。その状態で私が体重計に乗ったしよう。何がおこるか？

奈々子さん：うわー、自分にあてはめたくないわね。

先生：体重計に乗った瞬間、ある確率で「100 キロを超えている私」を観測するんだな。そして、このときになって初めて「体重が 100 キロに確定した私」に状態が変化するんだ。これは「100 キロを超えている私と 100 キロを超えてない私の重ね合わせ状態」とは別の状態へと変化することを表すんだよ。まあ、物理的にはありえないんだが、心理的にはありえそうな状態じゃな。

奈々子さん：例えが絶妙すぎて、泣けてくるわ。もう、私これからジョギングいってくる！

奈々子さんはそそくさと部屋をでて行ってしまった。

先生：あれ、なんでそんなに泣けるんだ？

助教：先生、奈々子さんはダイエット中だったんです。きっと、ダイエットでお菓子を我慢しているところで、そんな話をするもんだから、かわいそうに焦ってしまったんですよ。あとでよく謝っておいて下さいね。

先生：しゅん。